# 模块四 综合提升篇

## 第 1 节 动态问题探究（★★★☆）

### 强化训练

1．（2021•上海卷•★★）已知圆柱的底面半径为 1，高为 2，$AB$ 是上底面圆的一条直径，$C$ 是下底面圆周上的一个动点，则 $\Delta ABC$ 的面积的取值范围是_____.

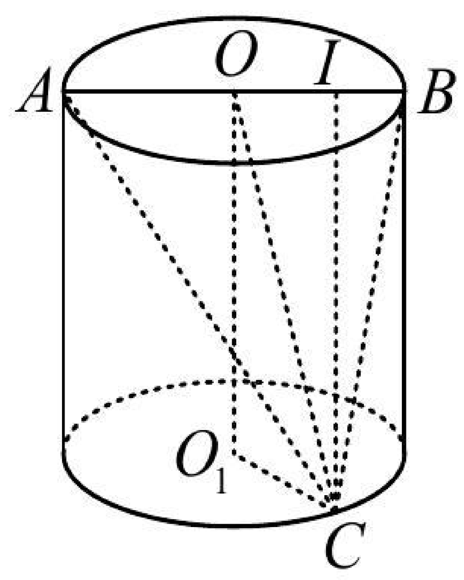
答案：$[2,\sqrt{5}]$

解析：由于 $AB$ 的长不变，所以分析 $S_{\Delta ABC}$ 的取值范围时，以 $AB$ 为底，研究高的范围即可，

如图，作 $CI\perp AB$ 于 $I$，由题意，$OO_1=2$，$O_1C=1$，所以 $OC=\sqrt{OO_1^2+O_1C^2}=\sqrt{5}$，

因为 $IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5-OI^2}$，且 $0\le OI\le 1$，所以 $2\le IC\le\sqrt{5}$，

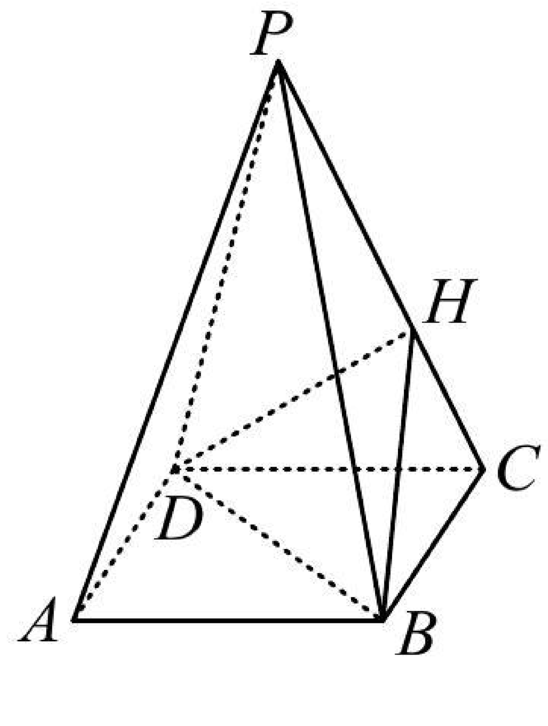
又 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot IC=\dfrac{1}{2}\times 2IC=IC$，所以 $2\le S_{\Delta ABC}\le\sqrt{5}$.






2．（2022•北京模拟•★★）已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 4，棱 $AB$ 的长为 2，点 $H$ 为侧棱 $PC$ 上一动点，那么 $\Delta HBD$ 的面积的最小值为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　（D）$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$




答案：D

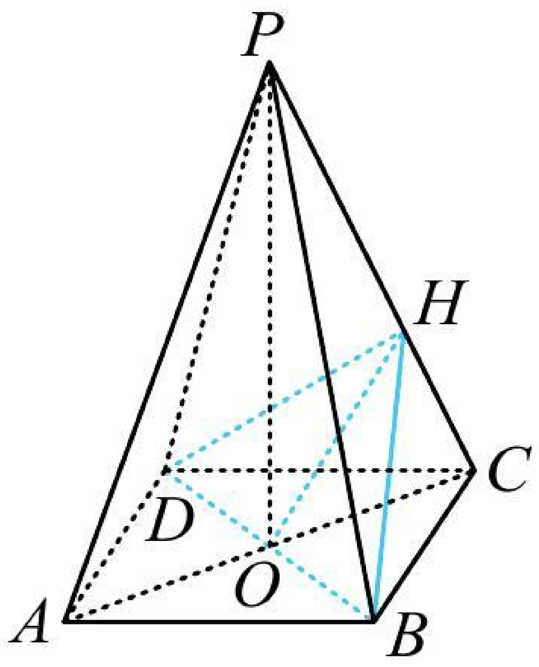
解析：如图，$PO\perp$ 平面 $ABCD\Rightarrow PO\perp BD$，又 $BD\perp AC$，所以 $BD\perp$ 平面 $PAC$，故 $BD\perp OH$，

由于 $BD$ 的长不变，所以当 $OH$ 最小时 $S_{\Delta HBD}$ 最小，此时 $OH\perp PC$，

算直角三角形斜边上的高，可用等面积法，由题意，$OP=4$，$OC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

$PC=\sqrt{OP^2+OC^2}=3\sqrt{2}$，所以 $S_{\Delta POC}=\frac{1}{2}PC\cdot OH=\frac{1}{2}OP\cdot OC$，故 $OH=\frac{OP\cdot OC}{PC}=\frac{4}{3}$，

所以 $(S_{\Delta HBD})_{\min}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.




**【反思】**分析三角形面积的最值，常抓住不变的特征. 例如第 1 题的底边 $AB$，第 2 题的底边 $BD$，故只需分析它们高的最值. 本类型一般不难，故方法册没单独讲.

3.（2023 • 昆明模拟 • ★★★）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 $P$ 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动，若 $3\le A_1P\le\sqrt{11}$，则三棱锥 $P-A_1BD$ 的体积的最小值是（　　）

（A）1　（B）$\frac{3}{2}$　（C）3　（D）$\frac{9}{2}$

答案：B

解析：条件中有 $A_1P$ 的范围，$A_1$ 为定点，故分析点 $P$ 的轨迹，如图 1，由于点 $P$ 在正方形 $ABCD$ 内，所以把 $A_1P$ 向平面 $ABCD$ 投影，到平面 $ABCD$ 上来分析，



因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp AP$，故 $A_1P=\sqrt{AA_1^2+AP^2}=\sqrt{9+AP^2}$，

所以 $3\le A_1P\le\sqrt{11}$ 即为 $3\le\sqrt{9+AP^2}\le\sqrt{11}$，故 $0\le AP\le\sqrt{2}$，

所以点 $P$ 的轨迹是正方形 $ABCD$ 内的以 $A$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆内（含边界），如图 2，

由图 1 可知，$V_{P-A_1BD}=V_{A_1-PBD}=\frac{1}{3}S_{\Delta PBD}\cdot AA_1=S_{\Delta PBD}$，所以问题等价于求 $\Delta PBD$ 的面积的最小值，

当 $P$ 在如图 2 所示的位置时，$\Delta PBD$ 的 $BD$ 边上的高最小，而 $BD=3\sqrt{2}$ 不变，所以此时 $S_{\Delta PBD}$ 最小，

故 $(V_{P-A_1BD})_{\min}=(S_{\Delta PBD})_{\min}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2})=\frac{3}{2}$.

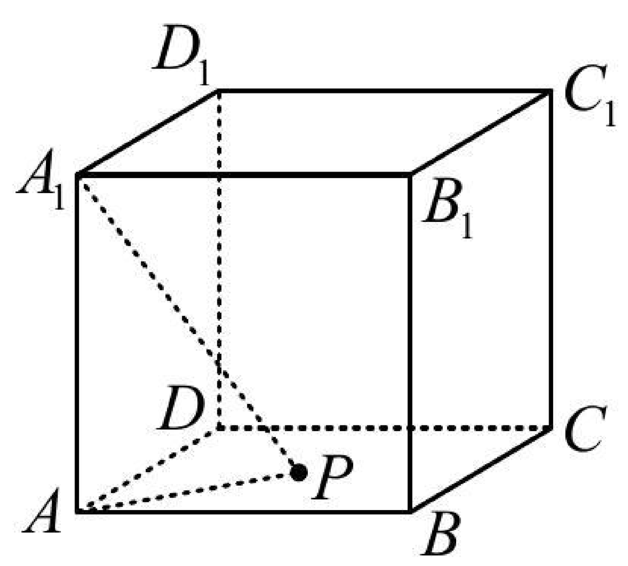



图1

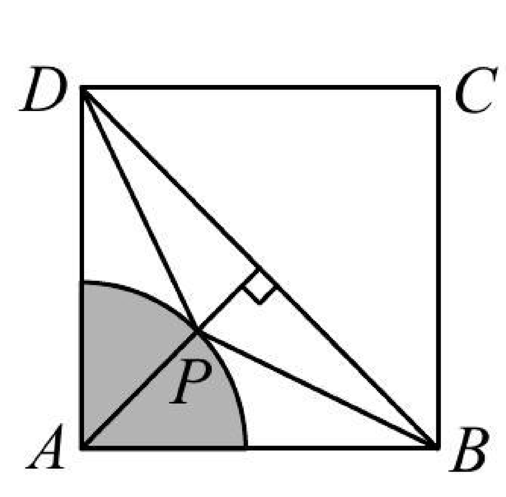



图2

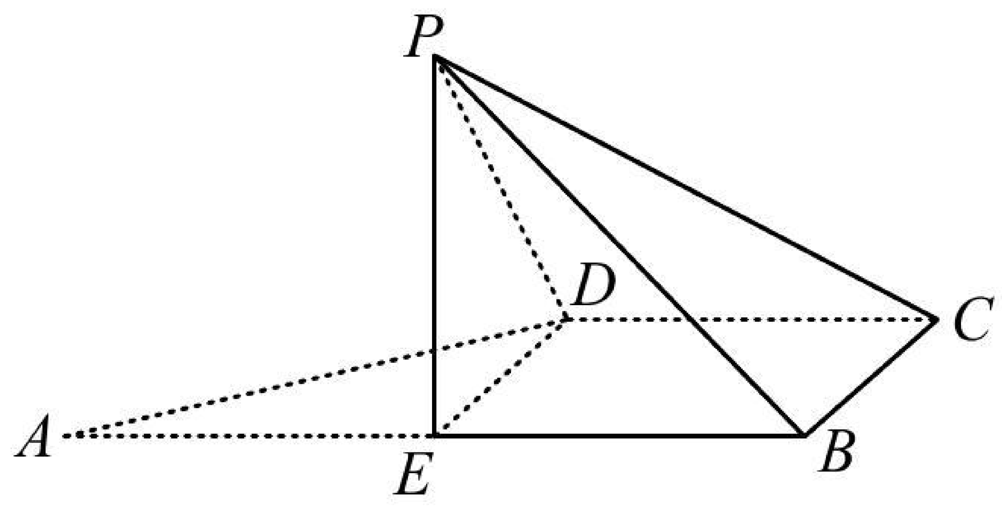
4.（2022 •福建模拟 •★★★）（多选）如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\mathbin{/\mkern-5mu/}CD$，$AB\perp BC$，$BC=CD=\frac{1}{2}AB=1$，$E$ 为 $AB$ 中点，以 $DE$ 为折痕把 $\Delta ADE$ 折起，使点 $A$ 到达点 $P$ 的位置，使 $PC=\sqrt{3}$，则（　　）

（A）平面 $PED \perp$ 平面 $PCD$

（B） $PC \perp BD$

（C）二面角 $P-DC-B$ 的大小为 $60^{\circ}$

（D）$PC$ 与平面 $PED$ 所成角为 $45^{\circ}$




**答案**：AB

**解析**：A 项，要分析面面垂直，先找线面垂直，观察图形可猜想 $CD \perp$ 面 $PED$，故尝试找理由，

如图，由题设可分析出 $BCDE$ 是边长为 1 的正方形，连接 $EC$，则 $PE=1$， $EC=\sqrt{2}$，翻折后 $PC=\sqrt{3}$，

所以 $PE^2+EC^2=PC^2$，故 $PE \perp EC$ ，又翻折前 $AE \perp ED$，所以翻折后 $PE \perp ED$，故 $PE \perp$ 面 $BCDE$，

所以 $PE \perp CD$ ，又 $CD \perp DE$ ，所以 $CD \perp$ 面 $PED$，从而面 $PED \perp$ 面 $PCD$，故 A 项正确；

B 项，$PC$ 在面 $BCDE$ 内的射影好找，故用三垂线定理判断，

$PE \perp$ 面 $BCDE \Rightarrow PC$ 在该面内的射影为 $EC$，因为 $BD \perp EC$ ，所以 $BD \perp PC$ ，故 B 项正确；

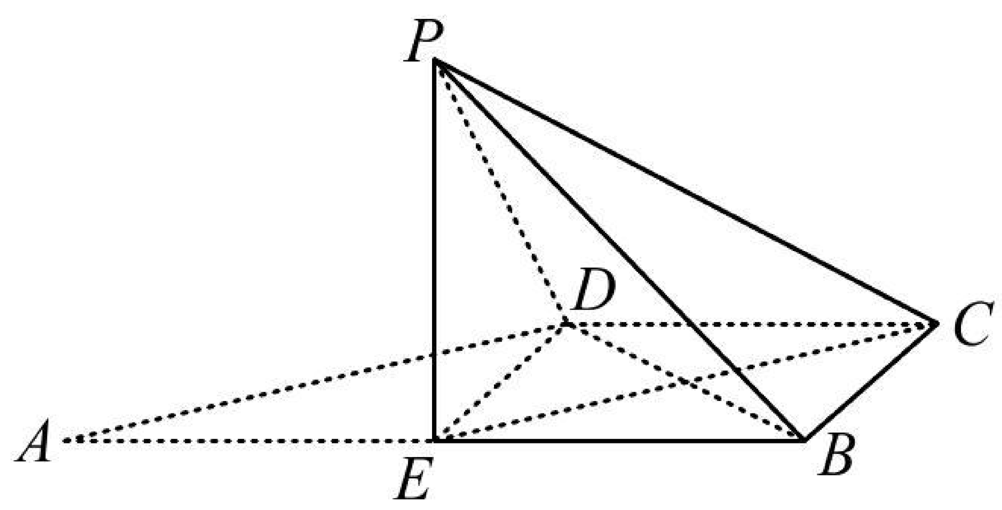
C 项，前面已证 $CD \perp$ 面 $PED$，所以 $CD \perp PD$ ，又 $CD \perp DE$ ，

所以 $\angle PDE$ 即为二面角 $P-DC-B$ 的平面角， $\tan\angle PDE=\dfrac{PE}{DE}=1 \Rightarrow \angle PDE=45^{\circ}$，故 C 项错误；



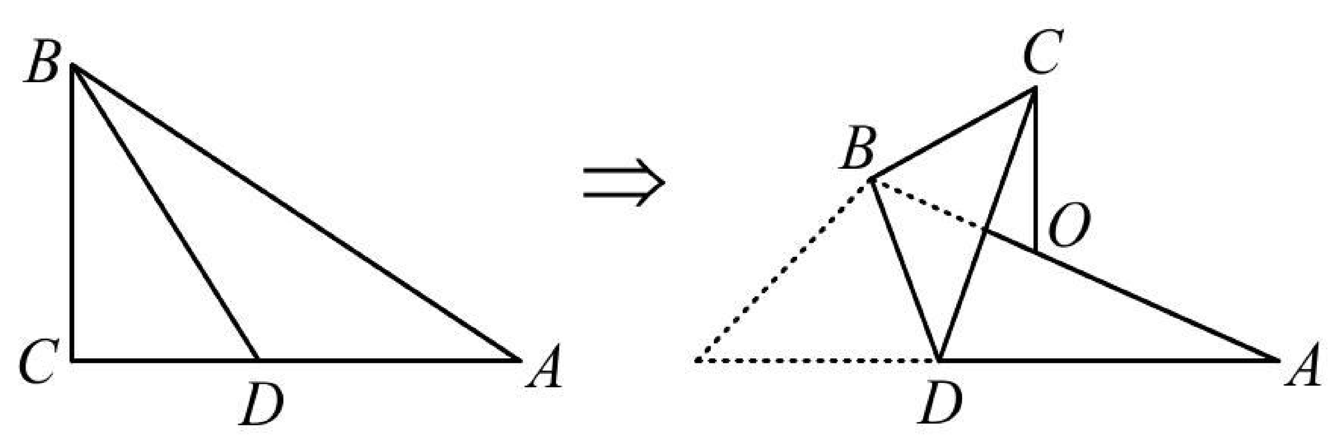
D 项，因为 $CD \perp$ 面 $PED$，所以 $\angle CPD$ 即为 $PC$ 与面 $PED$ 所成角， $CD=1$，

又 $PD=AD=\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle CPD=\dfrac{CD}{PD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\angle CPD \neq 45^{\circ}$，故 D 项错误.




5.（2023 • 四川模拟 • ★★★★）在 $\Delta ABC$ 中， $\angle C=90^{\circ}$ ， $AB=2$ ， $AC=\sqrt{3}$，$D$ 为 $AC$ 上的一点（不含端点），将 $\Delta BCD$ 沿 $BD$ 折起，使点 $C$ 在平面 $ABD$ 上的射影 $O$ 落在线段 $AB$ 上，则线段 $OB$ 长度的取值范围为（　　）

（A） $(\frac{1}{2},1)$　　（B） $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　（C） $(\frac{\sqrt{3}}{2},1)$　　（D） $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$




**答案**：A

**解法 1**：直接算 $OB$ 长度不易，所以考虑把翻折后的 $OB$ 对应到翻折前的平面图形中去，直接作折痕线 $BD$ 的垂线即可，

如图 1，过 $C$ 作 $CE\perp BD$ 于 $E$ 交 $AB$ 于 $O$，则该点即为翻折后空间图形中的 $O$，

接下来的计算可只在图 1 中进行，我们先设参. 可设 $CD=x$，但设 $\angle CBD=\theta$ 更好，图中各长度均方便计算，

由题意，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=1$，$\angle CBA=60^{\circ}$，设 $\angle CBD=\theta(0^{\circ}<\theta<60^{\circ})$，则 $CE=BC\cdot\sin\theta=\sin\theta$，

$BE=BC\cdot\cos\theta=\cos\theta$，$OB=\dfrac{BE}{\cos\angle EBO}=\dfrac{\cos\theta}{\cos(60^{\circ}-\theta)}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$，

再分析 $\theta$ 的范围，要使翻折后点 $C$ 在平面 $ABD$ 上的射影能落在线段 $AB$ 上，应有 $CE>OE$，

由图可知，$OE=BE\cdot\tan\angle EBO=\cos\theta\tan(60^{\circ}-\theta)$，所以 $\sin\theta>\cos\theta\tan(60^{\circ}-\theta)$，故 $\tan\theta>\tan(60^{\circ}-\theta)$，

结合 $0<\theta<60^{\circ}$ 可得 $30^{\circ}<\theta<60^{\circ}$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\tan\theta<\sqrt{3}$，故 $\dfrac{1}{2}<OB=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}\tan\theta}<1$.

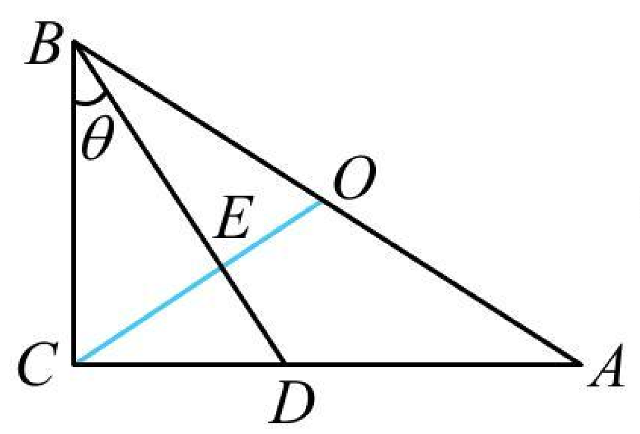



图1

⇒

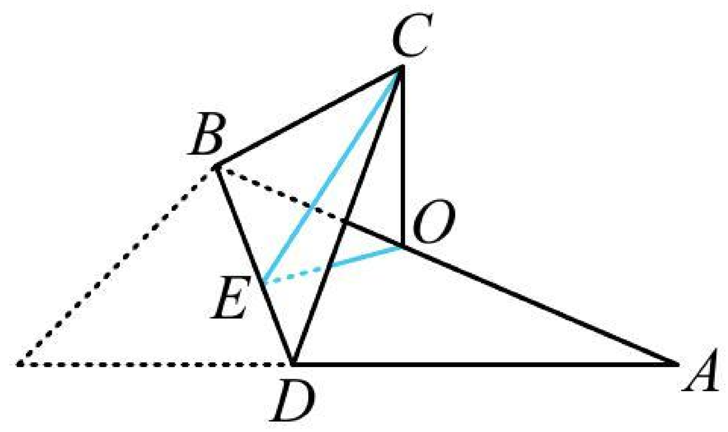



图2

**解法 2**：按解法 1 分析出只需在如上图 1 所示的平面图形中计算 $OB$ 的取值范围后，也可通过找点 $E$ 的运动轨迹来求 $OB$ 的取值范围，



注意到 $BE\perp CE$，所以点 $E$ 在以 $BC$ 为直径的圆上，如图 3，由于 $CE>OE$，所以 $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，故点 $E$ 的运动轨迹只能为图中的实线那一段圆弧，且不能取端点，

不难发现当 $E$ 从图 3 所示位置运动到图 4 所示位置时，$OB$ 逐渐减小，故只需计算两种临界情况下的 $OB$，

在图 3 中，$CE=OE$ 且 $BE\perp CO$，所以 $OB=BC=1$；

在图 4 中，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $OB=BC\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2}$；故 $\dfrac{1}{2}<OB<1$.

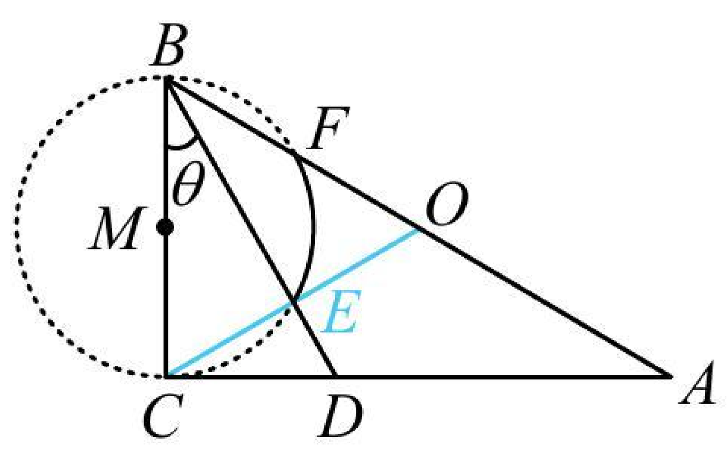



图3

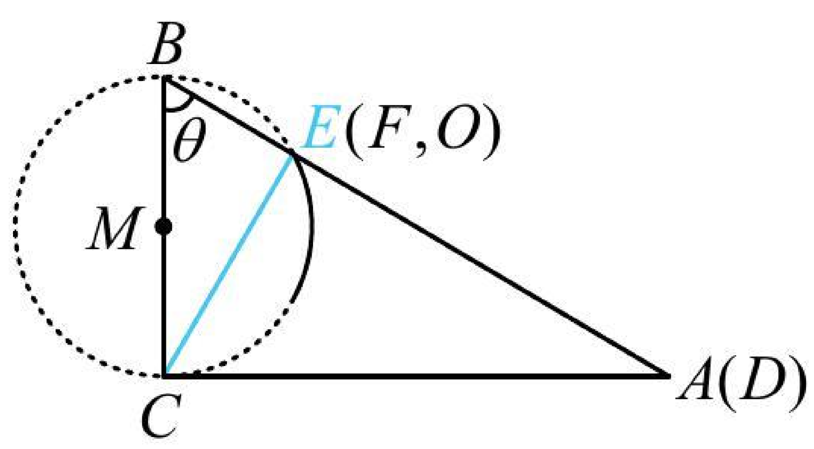



图4

6.（2022 • 山西模拟 • ★★★★）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，$M$ 为 $DD_1$ 的中点，$N$ 为正方形 $ABCD$ 内一动点（含边界），则下列命题正确的有（　　）

（A）若 $MN\perp A_1C_1$，则点 $N$ 的轨迹为线段

（B）若直线 $MN$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60^{\circ}$，则点 $N$ 的轨迹是一段椭圆弧

（C）若 $N$ 到直线 $BB_1$ 与到直线 $CD$ 的距离相等，则点 $N$ 的轨迹为一段抛物线

（D）若直线 $D_1N$ 与 $AB$ 所成的角为 $60^{\circ}$，则点 $N$ 的轨迹为一段双曲线

答案：ACD

解析：A 项，要找满足 $MN \perp A_1C_1$ 的点 $N$ 的轨迹，可过 $M$ 作一个与 $A_1C_1$ 垂直的平面，找该面与面 $ABCD$ 的交线，如图 1，在正方体中，$\begin{cases} A_1C_1 \perp B_1D_1 \\ A_1C_1 \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow A_1C_1 \perp$ 面 $BDD_1B_1$，所以当 $N$ 在面 $BDD_1B_1$ 与正方形 $ABCD$ 的交线 $BD$ 上时，$MN \perp A_1C_1$，从而点 $N$ 的轨迹是线段 $BD$，故 A 项正确；

B 项，涉及线面角，且面 $ABCD$ 的垂线好作，故先找到线面角，如图 2，$MD \perp$ 面 $ABCD \Rightarrow \angle MND$ 即为直线 $MN$ 与平面 $ABCD$ 所成的角，所以 $\angle MND = 60^\circ$，故 $DN = \dfrac{MD}{\tan \angle MND} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以点 $N$ 的轨迹是正方形 $ABCD$ 内的一段以 $D$ 为圆心，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆弧，故 B 项错误；

C 项，若 $C$ 项正确，则 $N$ 到某定点的距离应等于到某定直线的距离，故尝试把所给的两个距离中的一个转化为到点的距离，如图 3，$BB_1 \perp$ 面 $ABCD \Rightarrow BB_1 \perp NB$，所以点 $N$ 到直线 $BB_1$ 的距离等于 $NB$，于是 C 项的条件等价于 $N$ 到定点 $B$ 的距离与到定直线 $CD$ 的距离相等，从而点 $N$ 的轨迹是面 $ABCD$ 内以 $B$ 为焦点，$CD$ 为准线的一段抛物线，故 C 项正确；

D 项，虽可将直线 $AB$ 平移至 $C_1D_1$ 找到线线角，但不易用几何的方法翻译 $\angle C_1D_1N = 60^\circ$，故建系来做，如图 4 建系，可设 $N(x, y, 0)$，$0 \le x \le 2$，$0 \le y \le 2$，因为 $D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{D_1N} = (x, y, -2)$，$\overrightarrow{AB} = (0,2,0)$，由 $D_1N$ 与 $AB$ 所成的角为 $60^\circ$ 可得



$\left|\cos < \overrightarrow{D_1N}, \overrightarrow{AB} >\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{D_1N} \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{D_1N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{|2y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$，化简得：$\dfrac{3y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1$，

此方程表示 $x$ 轴 $y$ 轴构成的平面内的双曲线，所以点 $N$ 的轨迹是一段双曲线，故 D 项正确.

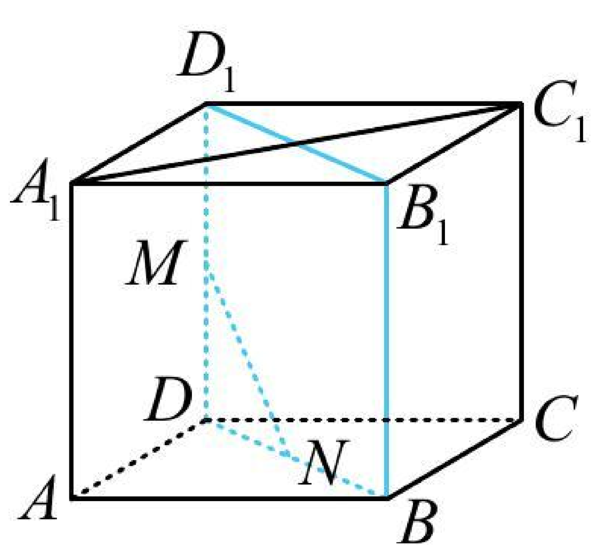


图1

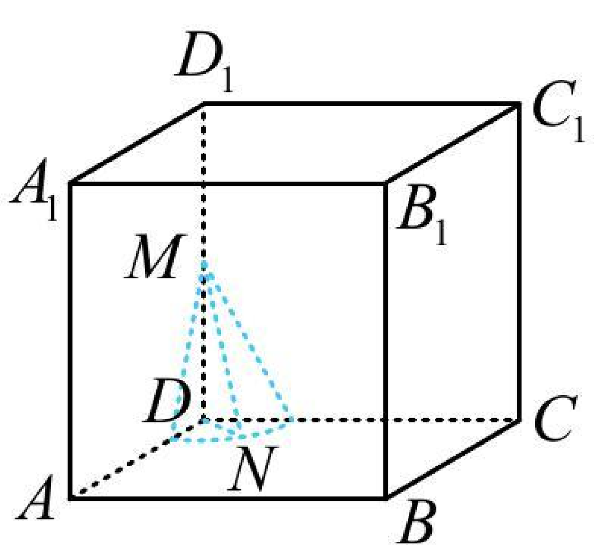


图2

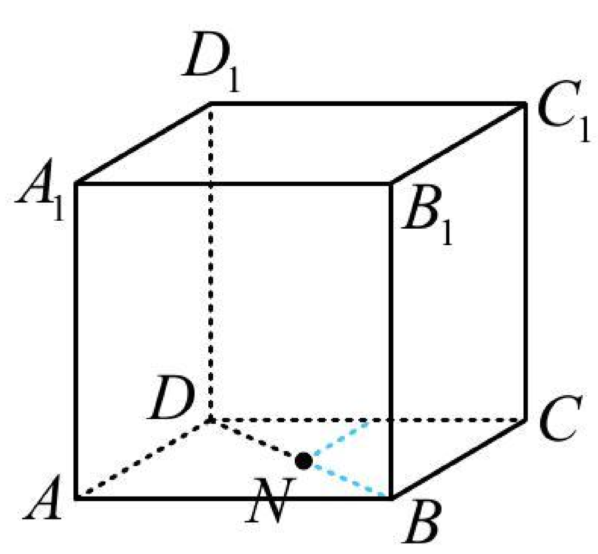


图3

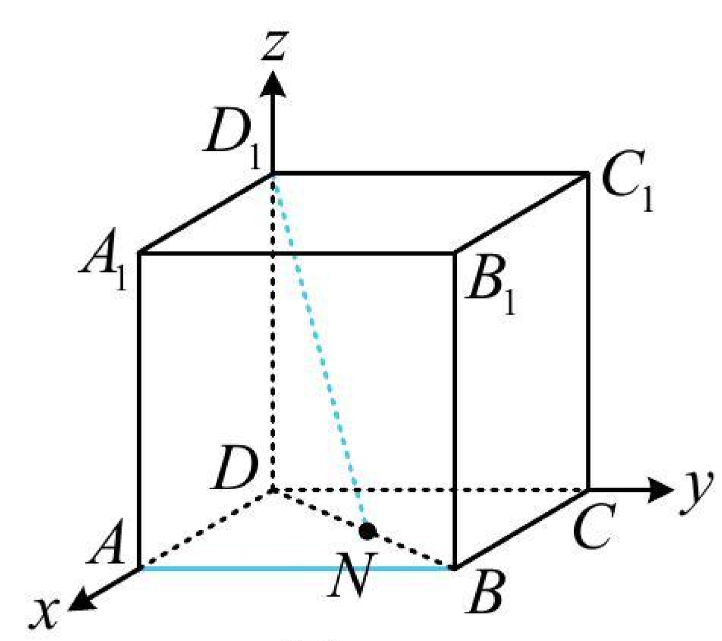


图4

7.（2020 • 新高考Ⅰ卷 • ★★★★）已知直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD = 60^\circ$，以 $D_1$ 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 $BCC_1B_1$ 的交线长为_____.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$

解析：研究球面与侧面 $BCC_1B_1$ 的交线属球的截面问题，故过球心作截面的垂线，找到截面圆圆心，

取 $B_1C_1$ 的中点 $O$，连接 $OD_1$，由题设可知 $\Delta B_1C_1D_1$ 是正三角形，所以 $OD_1 \perp B_1C_1$，

又 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱，所以 $BB_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$，从而 $OD_1 \perp BB_1$，故 $OD_1 \perp$ 面 $BB_1C_1C$，

所以点 $O$ 就是截面圆的圆心，且 $OD_1 = \sqrt{3}$，故球心到截面的距离为 $\sqrt{3}$，

因为球的半径 $R=\sqrt{5}$，所以截面圆半径 $r=\sqrt{R^2-OD_1^2}=\sqrt{2}$，

到此问题就转化成在正方形 $BB_1C_1C$ 内，以 $O$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径作圆弧，求该圆弧弧长的问题，

设该圆与 $BB_1$ 和 $CC_1$ 分别交于 $P$、$Q$ 两点，因为 $OB_1=1$，$OP=\sqrt{2}$，所以 $B_1P=1$，$\angle POB_1=45^{\circ}$，

由对称性可知 $\angle QOC_1=45^{\circ}$，所以 $\angle POQ=90^{\circ}$，

故该球面与侧面 $BCC_1B_1$ 的交线长为 $\frac{1}{4}\times 2\pi\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.